Polynômes d'approximation de Bernstein.

Leçon : 203, 241, 261, 262, 264, 266

Réf : ZQ, Demailly, (Gourdon)

Le théorème de Weierstrass affirme que toute fonction continue sur $[0,1]$ (ou plus généralement sur un compact) est limite uniforme d'une suite de polynômes. Une preuve possible utilise de la convolution. On présente ici une preuve utilisant des arguments probabilistes.

Théorème

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue, et ω son module de continuité uniforme, i.e. $\omega(\delta) = \sup\{|f(x)-f(y)|, |x-y| \leq \delta\}$.

Pour $n \geq 1$, on considère le polynôme

$$B_n(f)(x) = B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{C_n^k}_{=\binom{n}{k}} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Alors :

1) $(B_n)_n$ CVU vers f sur $[0,1]$

2) Vitesse de convergence : $\|f - B_n\|_\infty \leq C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, où $C \in \mathbb{R}$.

3) L'estimation est optimale : il existe une fonction lipschitzienne f pour laquelle $\|f - B_n\|_\infty \geq \frac{\delta}{\sqrt{n}}$, où $\delta \in \mathbb{R}$.

On fait des rappels sur le module de continuité et B_n.

Preuve

1) Soit $x \in [0,1]$, et soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. iid de loi de Bernoulli de paramètre x.

On pose $\forall m \geq 1$, $S_m = X_1 + \dots + X_m$. Donc S_m suit une loi binomiale de paramètres (m, x) :

$$\forall k \in [\![0, m]\!], \quad \mathbb{P}(S_m = k) = \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}.$$

On a de plus

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_m}{m}\right)\right] = \sum_{k=0}^{m} f\left(\frac{k}{m}\right) \mathbb{P}(S_m = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} f\left(\frac{k}{m}\right),$$

donc $\boxed{\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_m}{m}\right)\right] = B_m(x).}$

Heuristique : $\frac{S_m}{m}$ va être proche de x, et comme $\mathbb{E}[f(x)] = f(x)$, on aura $B_m(x) \simeq f(x)$.

On fixe un $\delta \in]0, 1[$. Alors

$f(x) - B_m(x) = \mathbb{E}\left[f(x) - f\left(\frac{S_m}{m}\right)\right]$, donc par l'inégalité triangulaire

$$|f(x) - B_m(x)| \leq \mathbb{E}\left[\left|f(x) - f\left(\frac{S_m}{m}\right)\right|\right].$$

Or, si $\left|x - \frac{S_m}{m}\right| \leq \delta$, par def de ω on a $\left|f(x) - f\left(\frac{S_m}{m}\right)\right| \leq \omega(\delta)$

et si $\left|x - \frac{S_m}{m}\right| > \delta$, $\left|f(x) - f\left(\frac{S_m}{m}\right)\right| \leq 2\|f\|_\infty$.

$:= \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$

Ainsi,

$$\mathbb{E}\left[\left|f(x)-f\left(\frac{S_m}{m}\right)\right|\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\left|f(x)-f\left(\frac{S_m}{m}\right)\right| \mathbb{1}_{|x-\frac{S_m}{m}|\leq \text{sup}(\delta)} + \left|f(x)-f\left(\frac{S_m}{m}\right)\right| \mathbb{1}_{|x-\frac{S_m}{m}|>\delta}\right]$$

$$\leq \omega(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{|x-\frac{S_m}{m}|>\delta}\right]$$

$$\leq \omega(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(|x-\frac{S_m}{m}|>\delta\right)$$

$$\leq \omega(\delta) + 2\|f\|_\infty \frac{1}{4m\delta^2}.$$

$$= \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2\delta^2}.$$

↙ Markov (déjà vu plusieurs fois) (ou Tchebychev, $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}[X]|\geq t) \leq \frac{\text{Var}(X)}{t^2}$.

En effet, $\mathbb{P}\left(|x-\frac{S_m}{m}|>\delta\right)$

$$\left(= \mathbb{P}\left(|x-\frac{S_m}{m}|^2>\delta^2\right)\right) \quad \swarrow \mathbb{E}\left[\frac{S_m}{m}\right] = x$$

$$\leq \frac{\text{Var}(S_m/m)}{\delta^2} \quad \text{et} \quad \text{Var}\left(\frac{S_m}{m}\right) = \frac{1}{m^2}\text{Var}(S_m)$$

$$= \frac{x(1-x)}{m} \leq \frac{1}{4m}.$$

Ainsi, $\|f-B_m\|_\infty \leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2m\delta^2}$.

Donc $\lim\limits_{m\to+\infty} \sup \|f-B_m\|_\infty \leq \omega(\delta)$.

On $\omega(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$ (conséquence du théorème de Heine).

Donc $\lim\limits_{m\to+\infty} \|f-B_m\|_\infty = 0$.

2) Vitesse de cv ?

On a, cf Remarque après, $\omega(\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\omega(\delta)$ si $\delta, \lambda\delta \in [0,1]$

Alors on a

$$\omega\left(\left|x - \frac{S_m}{m}\right|\right) = \omega\left(\sqrt{m}\left|x - \frac{S_m}{m}\right| \times \frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$

$$\leq \left(\sqrt{m}\left|x - \frac{S_m}{m}\right| + 1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right).$$

On sait aussi que

$$|f(x) - B_m(x)| \leq \mathbb{E}\left[\left|f(x) - f\left(\frac{S_m}{m}\right)\right|\right] \leq \mathbb{E}\left[\omega\left(\left|x - \frac{S_m}{m}\right|\right)\right].$$

Donc

$$|f(x) - B_m(x)| \leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\mathbb{E}\left[\sqrt{m}\left|x - \frac{S_m}{m}\right| + 1\right]$$

$$= \omega\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\left(1 + \sqrt{m}\,\mathbb{E}\left[\left|x - \frac{S_m}{m}\right|\right]\right)$$

$\Downarrow$

mais $\mathbb{E}\left[\left|x - \frac{S_m}{m}\right|\right] \leq \left(\mathbb{E}\left[\left|x - \frac{S_m}{m}\right|^2\right]\right)^{1/2}$ (convexité, variance, inclusion des $L^p([0,1])$, ... thème de question de cours !)

$Y = x - \frac{S_m}{m}$, $\mathbb{E}[Y] = 0$

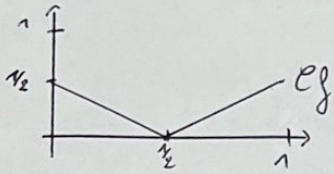
Donc

$$|f(x) - B_m(x)| \leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\left(1 + \sqrt{m}\left(\mathbb{E}\left[\left|x - \frac{S_m}{m}\right|^2\right]\right)^{1/2}\right)$$

$$= \omega\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\left[1 + \sqrt{m}\sqrt{\frac{x(1-x)}{m}}\right] \leq \frac{3}{2}\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right).$$

D'où $\|f - B_m\|_\infty \leq \frac{3}{2}\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$.

3) Ceci est-il optimal ? En effet, pour $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$, alors $\omega(\delta) \leq \delta$,



mais $\|f - B_m\|_\infty \geq |f(\frac{1}{2}) - B_m(\frac{1}{2})| = |B_m(\frac{1}{2})|$

$= \mathbb{E}\left[\left|\frac{S_m}{m} - \frac{1}{2}\right|\right]$

$= \frac{1}{2m}\mathbb{E}[|2S_m - m|]$

$= \frac{1}{2m}\mathbb{E}[|\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_m|]$, avec $\varepsilon_k = 2X_k - 1$, ε_k suit une loi de Rademacher et sont $\perp\!\!\!\perp$.

Par l'inégalité de Khintchine :

$\|f - B_m\|_\infty \geq \frac{1}{2m}\|\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_m\|_1$

$\geq \frac{1}{2m\sqrt{2}}\|\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_m\|_2$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{m}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$.

□

Module de continuité

Définition Si $f \in \mathcal{C}([a,b])$, le module de continuité ω de f est $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $\omega(t) = \sup\{|f(x) - f(y)|, |x - y| \leq t\}$.

Alors $\forall x, y \in [a,b]$, $|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|)$.

Propriétés

i) $\varepsilon \mapsto \omega(\varepsilon)$ est une $\mathcal{G}^0$ ↑

ii) $\omega(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0$

iii) $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+,\ \omega(t_1+t_2) \leq \omega(t_1)+\omega(t_2)$.

iv) $\forall m \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon \geq 0,\ \omega(m\varepsilon) \leq m\omega(\varepsilon)$

v) $\forall \lambda \geq 0,\ \forall \varepsilon \geq 0,\ \omega(\lambda\varepsilon) \leq (1+\lambda)\omega(\varepsilon)$.

Preuve

i) OK

ii) Thm de Heine: f continue sur le compact $[a,b]$, donc u.c.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,y,\ |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

$\omega(\delta) < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$, tq $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

~~Vrai $\forall x,y$ donc Si $\forall x,y, |x-y|<\delta, \Rightarrow$~~

~~Donc Soit $|f(x)-f(y)|$, $x,y \in [a,b]$, $|x-y|<\delta$~~ $< \varepsilon$

$= \omega(\delta)$

Soit $\varepsilon > 0$. Donc il Existe $\delta > 0$ tq $\omega(\delta) < \varepsilon$.

Soit $t < \delta$, $\omega(t) \leq \omega(\delta)$.

Donc $\omega(t) < \varepsilon$: $\omega(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$.

car: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ \forall t \in]0,\delta[,\ |\omega(t)| < \varepsilon$.

iii) $x,y \in [a,b]$ tq $|x-y| \leq t_1+t_2$. Il existe alors γ tq $|x-\gamma| \leq t_1$, $|\gamma-y| \leq t_2$, donc

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(\gamma)| + |f(\gamma)-f(y)| \leq \omega(t_1)+\omega(t_2).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Idempotence

(iv) $\Rightarrow$ (ii): $m = \lfloor \lambda \rfloor + 1$, $\omega(mt) \leq m\,\omega(t)$

$$\left.\begin{aligned} \omega(mt) &= \omega(\lfloor\lambda\rfloor t + t) \geq \omega((\lambda-1)t + t) = \omega(t\lambda) \\ \omega(t)m &= \lfloor\lambda\rfloor\omega(t) + \omega(t) \leq (\lambda+1)\omega(t) \end{aligned}\right\}$$

Donc $\omega(t\lambda) \leq (\lambda+1)\omega(t)$.

□

Tchebycheff (Loi faible des grands nombres)

Si $X_i \in L^2$, $S_m = \sum X_i$, (X_i) ind, alors

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_m}{m} - \mathbb{E}[X]\right| > t\right) \leq \frac{V(X)}{mt^2}, \quad t > 0.$$

Preuve

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_m}{m} - \mathbb{E}[X]\right| > t\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_m}{m} - \mathbb{E}\left[\frac{S_m}{m}\right]\right|^2 > t^2\right) \quad \text{Markov}$$

$$\leq \frac{1}{t^2}\mathrm{Var}\left(\frac{S_m}{m} - \mathbb{E}\left[\frac{S_m}{m}\right]\right)$$

et $\mathrm{Var}\left(\frac{S_m}{m} - \mathbb{E}\left[\frac{S_m}{m}\right]\right) = \frac{1}{m^2}\mathrm{Var}(S_m) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \frac{\mathrm{Var}(X)}{m}$.

□

où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(\alpha)$, $V(X) = \alpha(1-\alpha) \leq \frac{1}{4}$.

Khintchine

Soient $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ et $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i$, ε_i Rad de Rademacher.

Alors : $\|X\|_p \leq C_0\sqrt{p}\,\|X\|_2$, $1 \leq p < \infty$, $C_0 = \sqrt{2e}$

$\|X\|_1 \geq e^{-1/2}\|X\|_2$ } ZQ

Si les $(a_n)_n$ sont réels.

Si $\mathbb{E}[Y]=0$, $|Y|\leq 1$, alors par convexité :

$$e^{\lambda Y} \leq \operatorname{ch}\lambda + Y \operatorname{sh}\lambda.$$

car $y \mapsto e^{\lambda y}$ est en dessous de sa corde $\operatorname{ch}\lambda + y\operatorname{sh}\lambda$.

$-1 \leq y \leq 1$

Donc $\mathbb{E}[e^{\lambda Y}] \leq \operatorname{ch}\lambda + \operatorname{sh}\lambda\, \mathbb{E}[Y]$ ~~$\leq \operatorname{ch}$~~

$$= \operatorname{ch}\lambda$$

$$\leq e^{\lambda^2/2}$$ avec le DSE.

On suppose que $\|X\|_2 = 1$, ie $\sum a_n^2 = 1$.

X est symétrique, ses moments impairs sont nuls.

Donc $\mathbb{E}[e^{\lambda X}] = \prod_1^N \mathbb{E}[e^{\lambda a_n \varepsilon_n}] \leq e^{\lambda^2/2}$.

Donc $\mathbb{E}[X^{2q}] \leq \frac{(2q)!}{\lambda^{2q}} e^{\lambda^2/2}$ pour $q \in \mathbb{N}^*$.

On optimise en prenant $\lambda = \sqrt{2q}$, on a $\mathbb{E}[X^{2q}] \leq \frac{(2q)^{2q}}{(2q)^q} e^q$

~~$\|X\|_{2q}$~~ $\|X\|_{2q} \leq \sqrt{2eq}$.

On interpole entre deux entiers pairs en écrivant $2(q-1) < p \leq 2q$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $q \geq 2$.

Hölder : $\|X\|_p \leq \|X\|_{2q} \leq e\sqrt{2q} \leq \sqrt{e}\sqrt{p+2} \leq \sqrt{2e}\sqrt{p}$.

Autre sens : dualité.

→ sinon cf Gourdon pour 3) (bourbier d'utiliser Khintchine).

Méthode du Gourdon (pour 3) :

$f(x) = |x - \frac{1}{2}|$.

On pose $|u_m| = |B_m(\frac{1}{2})| = |B_m(\frac{1}{2}) - f_m(\frac{1}{2})| \leq \|f - B_m\|_\infty$.

On a : $u_m = B_m(\frac{1}{2})$,

$$u_m = B_m(\tfrac{1}{2}) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{m-k} f\left(\frac{k}{m}\right)$$

$$= \frac{1}{2^m} \sum_{0 \leq k < m/2} \binom{m}{k} \left(\tfrac{1}{2} - \frac{k}{m}\right) + \frac{1}{2^m} \sum_{m/2 \leq k \leq m} \binom{m}{k} \left(\frac{k}{m} - \tfrac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2^m} \sum_{0 \leq k < m/2} \binom{m}{k} \left(\tfrac{1}{2} - \frac{k}{m}\right) + \frac{1}{2^m} \sum_{0 \leq k \leq m/2} \binom{m}{m-k} \left(\tfrac{1}{2} - \frac{k}{m}\right)$$

$$= \frac{1}{2^m} \sum_{0 \leq k < m/2} \binom{m}{k} \left(1 - \frac{2k}{m}\right)$$

Donc $2^m u_m = \sum_{0 \leq k < m/2} \binom{m}{k} - \frac{1}{m} \sum_{0 \leq k < m/2} 2k \binom{m}{k}$

Or $\binom{m-1}{k-1} \times \frac{m}{k} = \binom{m}{k}$,

$$2^m u_m = \sum_{0 \leq k < m/2} \binom{m}{k} - 2 \sum_{1 \leq k < m/2} \binom{m-1}{k-1}, \quad \binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}$$

$$= \sum_{0 \leq k < m/2} \left[\binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}\right] - 2 \sum_{1 \leq k < m/2} \binom{m-1}{k-1} = \cdots = \binom{m-1}{\lfloor (m-1)/2 \rfloor}.$$

$$2^n u_n = \frac{(n-1)!}{\left(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\right)!\left(n-1-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\right)!} \qquad p! \sim (2p\pi)^{1/2}\left(\frac{p}{e}\right)^p$$

$$\to n-1-\lfloor \tfrac{n-1}{2} \rfloor \sim \lfloor \tfrac{n-1}{2} \rfloor$$

$$\sim \sqrt{2(n-1)\pi}\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{(n-1)\pi}\left(\frac{n-1}{2e}\right)^{\frac{n-1}{2}}}\right)^2$$

$$\sim \sqrt{2n\pi}\,\cancel{\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}\,\frac{1}{n\pi\,\cancel{\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}}\,2^{n-1}$$

$$\sim \frac{2^n}{\sqrt{2n\pi}}$$

$$u_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}.$$

$\square$

On peut améliorer la vitesse de CV si f est régulière.

ex: $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, $\|B_n f - f\|_\infty \leq \frac{1}{8n}\|f''\|_\infty$.

avec des dével. lim à l'ordre $\oplus$ élevé.

Preuve de Khintchine

$f = \sum_{j=1}^{m} a_j r_j$, r_j Rademacher.

Par homogénéité on suppose que $\|f\|_2 = 1$.

ie $\sum_{j=1}^{m} a_j^2 = 1$.

Mq $\|f\|_1 \underset{\text{C-S}}{\leq} \|f\|_2 \leq \sqrt{e}\, \|f\|_1$.

On minore $\|f\|_1$ "par dualité", si $g \in L^\infty$, on va écrire $\mathbb{E}[fg] \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$, d'où si $g \neq 0$:

$$\|f\|_1 \geq \frac{\mathbb{E}[fg]}{\|g\|_\infty}.$$

On pose $g = \prod_{j=1}^{m} (1 + i a_j r_j)$ idée $\|g\|_\infty$ petit, $\mathbb{E}[fg]$ grand

$$|g(\omega)| = \prod_{j=1}^{m} \sqrt{1 + a_j^2 r_j^2(\omega)} = \prod_{j=1}^{m} \sqrt{1 + a_j^2} \leq \prod_{j=1}^{m} \sqrt{\exp a_j^2} \quad , \; 1 + x \leq e^x$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} a_j^2\right) = \sqrt{e}. \Rightarrow \|g\|_\infty \leq \sqrt{e}.$$

Si $j \in [\![1, m]\!]$, par ind., on a

$$\mathbb{E}[r_j g] = \mathbb{E}\left[r_j (1 + i a_j r_j) \prod_{k \neq j} (1 + i a_k r_k)\right]$$

$$= \mathbb{E}[r_j (1 + i a_j r_j)] \prod_{k \neq j} \mathbb{E}[1 + i a_k r_k]$$

$$= \mathbb{E}[r_j + i a_j] \prod_{k \neq j} \mathbb{E}[1 + i a_k r_k] = i a_j \prod_{k \neq j} 1 = i a_j.$$

$$\mathbb{E}[fg] = \sum_{j=1}^{m} a_j \mathbb{E}[r_j g] \Rightarrow |\mathbb{E}[fg]| = 1. \Rightarrow \boxed{\|f\|_1 \geq \frac{1}{\sqrt{e}}}.$$